1. Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатарлар. Лейбниц белгісі.

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \,, \qquad (1)$$

мұндағы $a_n > 0$ барлық $n \in N$, (яғни оң және теріс мүшелері алма-кезек орналасқан).

Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатардың жинақтылығының жеткілікті белгісі - *Лейбниц белгісі* (1714 жылы Лейбниц бекіткен).

Теорема 1 (Лейбниц белгісі). (1) таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар жинақты, егер:

1) Қатардың мүшелерінің абсолюттік шамаларының тізбегі монотонды кемімелі

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots > a_n > \ldots$$

болса;

2) Қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылса

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Сондай-ақ (1) қатарының S қосындысы

$$0 < S < a_1 \qquad (2)$$

шартын қанағаттандырады.

Ескерту:

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots \qquad (3)$$

түріндегі таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар (бірінші мүшесі теріс таңбамен алынған) әрбір мүшесін (-1)-ге көбейту арқылы (1) қатары түріне келтіріліп зерттелінеді.

(1) және (3) түріндегі Лейбниц теоремасының шарттары орнидалатын қатарларды *Лейбниц қатарлары* деп аталады.

2. Таңбасы ауыспалы қатарлардың жинақтылығының жалпы жеткілікті белгісі.

Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар таңбасы ауыспалы қатардың дербес жағдайы.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

шексіз оң және теріс таңбалы мүшелерінің жиынынан тұратын сандық қатар *таңбасы ауыспалы қатар* деп аталады.

Мысал 1:

$$-a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + \ldots$$

түрінде берілген қатар.

Теорема 2.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (4)$$

таңбасы ауыспалы қатар берілсін. Егер берілген (4) қатарының мүшелерінің абсолюттік шамасынан (модулінен) құралған

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (5)$$

қатары жинақты болса, онда (4) қатары да жинақты болады.

Ескерту: Керісінше тұжырым орындалмайды, яғни (4) қатары жинақты болса, онда (5) қатары жинақты екендігі орындалмайды.

3. Сандық қатарлардың абсолютті және шартты жинақтылығы.

- Таңбасы ауыспалы қатар *абсолютті жинақты* деп аталады, егер оның мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар жинақты болса.

- Таңбасы ауыспалы қатар *шартты жинақты* деп аталады, егер қатардың өзі жинақты, ал оның мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар жинақсыз болса.

Мысал 2: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$ таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар.

Лейбниц белгісінің шарттарын тексерейік:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Лейбниц белгісі бойынша жинақты. Мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ - гармониялық қатар жинақсыз.

Демек, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ қатары шартты жинақты.

Мысал 3: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}+\ldots$ таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар.

Лейбниц белгісінің шарттарын тексерейік:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{6}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$

Лейбниц белгісі бойынша жинақты. Мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

қатарын зерттейік.

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!(n+1)}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0\cdot$$

Бұдан $D=0<1$, демек қатар Даламбер белгісі бойынша жинақты.

Демек, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$ қатары абсолютті жинақты.

4. Абсолютті жинақты қатарлардың негізгі қасиеттері.

- Егер қатар абсолютті жинақты және қосындысы S болса, онда осы қатардың мүшелерінің орналасу ретін өзерткеннен алынған қатар да жинақты және оның да қосындысы берілген қатардың S қосындысына тең (Дирихле теоремасы).

- Қосындысы S_1 және S_2 болатын абсолютті жинақты қатарларды мүшелеліп қосуға (азайтуға) болады. Нәтижесінде, қосындысы S_1+S_2 (айырмасы S_1-S_2) болатын абсолютті жинақты қатарды аламыз.
- $a_1+a_2+\ldots$ және $b_1+b_2+\ldots$ екі қатардың көбейтіндісі
  $(a_1b_1)+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\ldots+(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_n)+\ldots$
  қосындылары S_1 және S_2 болатын абсолютті жинақты қатарлар көбейтіндісі абсолютті жинақты қатар, қосындысы $S_1\cdot S_2$.

Сонымен абсолютті жинақты қатарларды қосуға, алуға, көбейтуге болады. Қатардың қосындысы қатардың мүшелерінің жазылу ретінен байланыссыз.

Шартты жинақты қатарлар үшін бұл қасиеттер орындалмайды:

1) Шартты жинақты қатардың мүшелерінің орнын ауыстырғаннан қатардың қосындысы өгереді

Мысал 4: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

шартты жинақты. Оның қосындысы S болсын. Оның мүшелерін бір оң мүшесі екі теріс мүшелерінің орналасуы арқылы орналастырсақ:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right)}_{S}=\frac{1}{2}S.$$

Енді қатар қосындысы $\frac{1}{2}S$.

2) Шартты жинақты қатардың мүшелерінің орналасу ретін өзгертіп алдын ала берілген S қосындысы бар жинақты қатарды немесе жинақсыз қатарды алуға болады (Риман теоремасы)

Ескерту: Сондықтан қатарларға олардың абсолютті жинақтылығына көз жеткізбей тұрып амалдар қолдануға болмайды.

Нұсқау: Абсолютті жинақтылықты көрсету үшін оң таңбалы қатарлардың жинақтылық белгілерін қолданамыз.